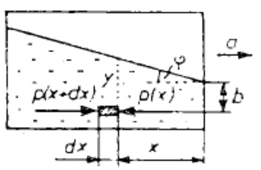
18. GIBANJE TEKOČIN

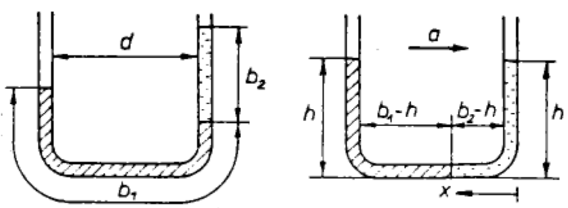
18.1. Akvarij z vodo začnemo pospešeno potiskati v vodoravni smeri s stalnim pospeškom a. Kolik je naklonski kot (φ) gladine vode glede na vodoravno smer?

To nalogo smo že obravnavali (gl. 5.35.). Tokrat jo rešimo drugače.
Izberemo element tekočine z dolžino dx v smeri pospeška in s prečnim presekom S, na razdalji x od sprednje strani posode in na globini b pod gladino ob sprednji strani. Nanj pritiska tekočina od spredaj s tlakom $p(x) = \varrho g(b + x\,\mathrm{tg}\varphi)$, z leve strani pa ga potiska tekočina s tlakom $p(x + dx) = p(x) + \varrho g(\mathrm{tg}\varphi\, dx)$. Rezultanta obeh nasprotujočih si tekočinskih pritiskov: $S[p(x + dx) - p(x)]$
daje tekočinskemu elementu z maso $dm = \varrho S dx$
pospešek a:



$S[p(x + dx) - p(x)] = a\,dm$ ali
$S\varrho g\,\mathrm{tg}\varphi\, dx = a\varrho S dx$
$a = g\,\mathrm{tg}\varphi$ ali
$\mathrm{tg}\varphi = a/g$

18.2. V levi krak U-cevi natočimo živo srebro, v desnega pa vodo. Dolžina živosrebrnega stolpca je $b_1 = 10$ cm, vodnega pa $b_2 = 8$ cm; razdalja med krakoma cevi je $d = 2$ cm. Cev začnemo pospešeno pomikati v desno. Pri katerem pospešku (a) sta gladini v obeh krakih enako visoko? Gostota živega srebra je $\varrho_1 = 13{,}6$ g/cm^3, gostota vode je $\varrho_2 = 1$ g/cm^3.



V spodnjem delu mirujoče cevi se tlak ne spreminja v vodoravni smeri. Brž ko cev pospešeno potiskamo v desno, se tlak v levi smeri povečuje, saj je potrebna tlačna razlika za pomikanje tekočine v desno. Na mestu $x = 0$ (v vznožju desnega kraka, kjer je voda) je tlak enak $\varrho_2 gh$ (zunanjega tlaka ne upoštevamo, ker sta oba kraka cevi

odprta). Če se pomaknemo v levo za dx, se tlak poveča za dp, tako da je $S dp = dma = S dx \varrho_2 a$ ali $dp = a\varrho_2 dx$. Tlak na stiku vode in živega srebra (kjer je $x = b_2 - h$) označimo s p_0 in znaša:

$p_0 = \varrho_2 gh + \varrho_2 a(b_2 - h)$

Levo od tega mesta je v cevi živo srebro z gostoto ϱ_1. V vznožju levega kraka ($x = d$) je tlak največji (p_1):

$p_1 = \varrho_1 gh = p_0 + \varrho_1 a(d - b_2 + h)$

Ker velja še: $d = b_1 + b_2 - 2h$, dobimo:

$a = (\varrho_1 - \varrho_2)(b_1 + b_2 - d)g/[\varrho_1(d + b_1 - b_2) + \varrho_2(d + b_2 - b_1)]$
$a = 36$ m/s^2

18.3. Pokončna posoda je do višine $h = 1$ m napolnjena z vodo. Kolik je tlak na dnu posode (p), če se posoda giblje navzgor s pospeškom $a = 5$ m/s^2?

Vodo potiska navzgor sila N, s katero pritiska dno posode:

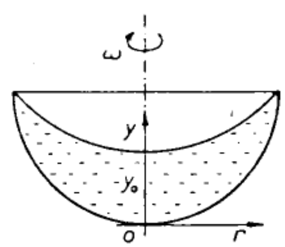
$N - mg = ma$
$N = m(g + a) = S\varrho h(g + a)$, S = prečni presek posode

Sila N je tudi enaka sili, s katero voda pritiska navzdol na dno. Tlak vode torej znaša:

$p = N/S = \varrho h(g + a) = 0{,}15$ bar

18.4. Odprta polkroglasta posoda s polmerom $R = 10$ cm je polna vode. Posoda se začne vrteti okrog navpične simetrijske osi. Pri kateri kotni hitrosti (ω_0) se gladina vode na osi zniža na polovico? Koliko vode (volumen V) izteče iz posode?
(Glej nalogo 6.9.)

$y = y_0 + \omega^2 r^2/2g$



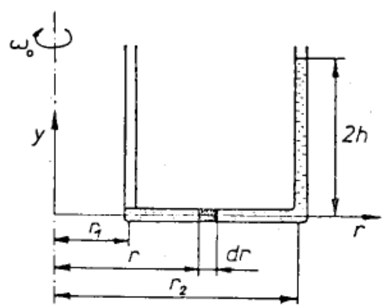
Konstanta y_0 je višina gladine na osi ($r = 0$); določimo jo s pogojem na robu posode: $y = R$ za $r = R$:

$R = y_0 + \omega^2 R^2/2g$
$y_0 = R - \omega^2 R^2/2g$
$y = R - \omega^2(R^2 - r^2)/2g$
$\omega = \omega_0$ za $y_0 = R/2 = R - \omega_0^2 R^2/2g$ ali
$\omega_0^2 = g/R$, $\omega_0 = 9{,}9$ /s
$y = R - \omega_0^2(R^2 - r^2)/2g = R - (R^2 - r^2)/2R = (R^2 + r^2)/2R$

Prostornina iztekle vode je:

$V = \int_0^R (R - y)2\pi r dr = (\pi/R)\int_0^R (R^2 - r^2) r dr$
$V = \pi R^3/4 = 785$ cm^3

18.5. Tanka U-cev z odprtima krakoma je do višine $h = 20$ cm napolnjena z živim srebrom. S kolikšno kotno hitrostjo (ω_0) se mora cev vrteti okrog navpične osi, ki je vzporedna z levim krakom in od njega oddaljena za $r_1 = h/2$, da se gladina živega srebra v levem kraku spusti do dna cevi? Presek cevi je enakomeren. Desni krak je od osi oddaljen za $r_2 = 2h$.
Nalogo rešimo na dva načina.



a) Pri nalogi 6.9 smo izračunali obliko gladine rotirajoče tekočine: $y = y_0 + \omega^2 r^2/2g$. Konstanta y_0 je odvisna od višine gladin v obeh krakih cevi: $y(r_1) + y(r_2) = 2h = 2y_0 + \omega^2(r_1^2 + r_2^2)/2g$ ali

$$y_0 = h - \omega^2(r_1^2 + r_2^2)/4g = h - 17h^2\omega^2/16g$$

Za $\omega = \omega_0$ je $y(r_1) = 0 = y_0 + \omega_0^2 r_1^2/2g$ ali

$$\omega_0^2 = 4gh/(r_2^2 - r_1^2) = 16g/15h$$
$$\omega_0 = 7{,}2\ /\mathrm{s}$$

b) V dnu cevi si mislimo element tekočine s presekom S in dolžino dr, ki je na razdalji r od osi. Nanj učinkuje v radialni smeri sila $F(r + \mathrm{d}r) - F(r) = \mathrm{d}F$ in mu vsiljuje radialni pospešek $r\omega^2$:

$$\mathrm{d}F = r\omega^2 \mathrm{d}m = r\omega^2 S\varrho \mathrm{d}r$$

Po integraciji dobimo:

$$F = konst. + \varrho S\omega^2 r^2/2$$

Integracijsko konstanto določimo z robnim pogojem: pri $\omega = \omega_0$ v levem kraku ni tekočine, torej je $F(r_1) = 0 = konst. + \varrho S\omega_0^2 r_1^2/2$.

$$F = \varrho S\omega_0^2(r^2 - r_1^2)/2$$

V dnu desnega kraka je tlak enak $\varrho g \cdot 2h$, torej je:

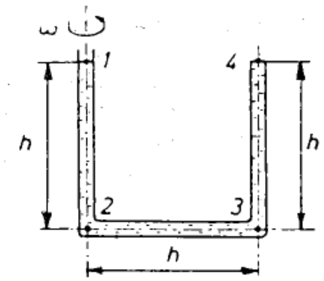
$$F(r_2) = S\varrho g 2h = \varrho S\omega_0^2(r_2^2 - r_1^2)/2 \quad \text{ali}$$
$$\omega_0^2 = 4hg/(r_2^2 - r_1^2) \quad , \quad \text{enako kot zgoraj.}$$

18.6. U-cev ima en krak zaprt in je napolnjena z živim srebrom; višina kraka je $h = 20$ cm. Cev vrtimo okrog odprtega kraka s stalno kotno hitrostjo $\omega = 5$ /s. Kolikšni so tlaki v točkah 1, 2, 3 in 4, če sega živo srebro v odprtem kraku enako visoko kot v zaprtem? Zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar, gostota živega srebra je $\varrho = 13.6$ g/cm^3.

$$p_1 = p_0 = 1 \text{ bar}$$
$$p_2 = p_0 + \varrho gh = 1{,}27 \text{ bar}$$

Če bi bil zunanji krak odprt, bi živo srebro v njem segalo do višine $h_1 = \omega^2 h^2/2g$ (glej nalogo 6.9.). Ker je krak zaprt, je v točki 4 tlak $p_4 = p_0 + \varrho g h_1 = p_0 + \varrho\omega^2 h^2/2 = 1{,}07$ bar

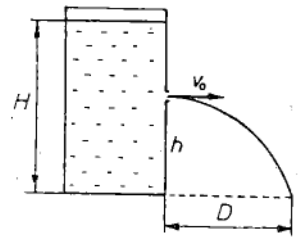
$$p_3 = p_4 + \varrho gh = 1{,}34 \text{ bar}$$



18.7. Zgoraj odprta pokončna valjasta posoda je do višine H napolnjena z vodo. Na kateri višini (h) od dna moramo v steni izvrtati luknjico, da je domet iztekajočega curka na vodoravnih tleh največji?

Voda izteka s hitrostjo $v_0 = [2g(H - h)]^{1/2}$. Domet pri vodoravnem metu z višine h je:

$$D = v_0(2h/g)^{1/2} \quad \text{ali}$$
$$D^2 = 4h(H - h)$$



Največji domet dobimo pri višini h, ki zadošča enačbi $\mathrm{d}D^2/\mathrm{d}h = 0$ ali $H - h - h = 0$:

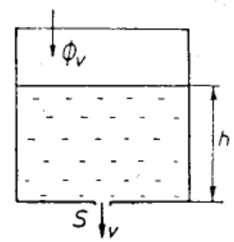
$$h = H/2$$

18.8. V sredini dna posode, ki je do višine $h = 30$ cm napolnjena z vodo, izvrtamo luknjico. S kolikšno hitrostjo (v) izteka voda skozi luknjico, če posoda: a) miruje, b) se giblje s pospeškom $a = 2$ m/s^2 navzgor oziroma navzdol, c) se dviguje enakomerno in č) se giblje s pospeškom a v vodoravni smeri?

V primerih a) in c) je $v = (2gh)^{1/2} = 2{,}4$ m/s. Enak rezultat dobimo tudi za primer č), če se gladina vode nad luknjico zaradi vodoravnega pospeška ne spremeni. V primeru b) je $v = [2h(g \pm a)]^{1/2} = 2{,}7$ m/s ali $2{,}2$ m/s.

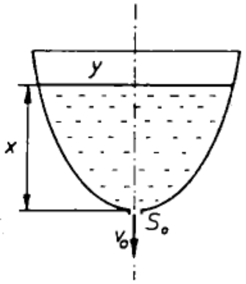
18.9. Voda doteka s stalnim volumenskim tokom $\Phi_V = 150$ cm^3/s v sod, ki ima v dnu luknjico s presekom $S = 0{,}5$ cm^2. Pri kateri višini (h) se gladina vode v sodu ne spreminja s časom?

$$\Phi_V = vS = S(2gh)^{1/2}$$
$$h = \Phi_V^2/(2gS^2) = 46 \text{ cm}$$



18.10. Odprta rotacijsko simetrična posoda je napolnjena z vodo. V dnu ima luknjico s presekom S_0, skozi katero voda izteka iz posode. Kakšna mora biti oblika plašča posode, da se gladina vode zaradi iztekanja enakomerno znižuje?

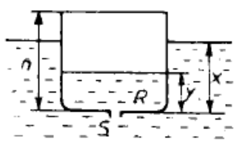
V trenutku t je gladina vode na višini x nad dnom, njen polmer pa je y. Voda izteka s hitrostjo v_0 in gladina se spušča s hitrostjo $v = v_0S_0/(\pi y^2)$. Hitrosti v in v_0 sta povezani tudi z Bernoullijevo enačbo za navpično pretakanje:



$\varrho v^2/2 + \varrho gx = \varrho v_0^2/2$ ali
$v_0^2 = v^2 + 2gx$ ali
$(\pi y^2/S_0)^2 = 1 + 2gx/v^2$
$y^2 = (S_0/\pi)(1 + 2gx/v^2)^{1/2}$

18.11. Valjast lonec z maso $m = 2$ kg, polmerom $R = 8$ cm in višino $h = 16$ cm previdno položimo v vodo. Ko se lonec umiri, odpremo v sredini dna luknjico s presekom $S = 3$ mm^2, skozi katero voda priteka v lonec. Po kolikšnem času (t_1) se lonec potopi toliko, da začne voda pritekati vanj prek zgornjega roba?

V začetku ($t = 0$) je dno lonca v globini $x_0 = m/(\varrho\pi R^2) = 10$ cm (ϱ = gostota vode). V trenutku t je voda v loncu do višine y, dno pa je v globini x pod zunanjo gladino. Tedaj deluje na lonec vzgon $\varrho g(x - y)\pi R^2$, ki je približno enak (če zanemarimo pospešek spuščanja lonca in upor vode) teži lonca mg. Dobimo: $m = \varrho(x - y)\pi R^2$ ali



$x = y + m/(\varrho\pi R^2) = y + x_0$

V naslednjem kratkem časovnem intervalu dt priteče v lonec d$V = vS$d$t = S$d$t[2g(x - y)]^{1/2}$ vode, ki poveča gladino vode v loncu za dy:

$\pi R^2 \mathrm{d}y = S\mathrm{d}t[2g(x - y)]^{1/2} = S\mathrm{d}t(2mg/\varrho\pi R^2)^{1/2}$
(lonec ima tanke stene, tako da sta zunanji in notranji polmer praktično enaka).

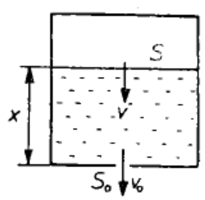
$y = t(S/\pi R^3)(2mg/\pi\varrho)^{1/2}$

Voda začenja pritekati v lonec prek roba, ko je $y + x_0 = x = h$ ali ko je $y = h - x_0$, kar se zgodi za $t = t_1$:

$t_1 = (h - x_0)(\pi R^3/S)(\pi\varrho/2mg)^{1/2} = 4{,}8$ min

18.12. Pokončna posoda z višino $h = 70$ cm in prečnim presekom $S = 600$ cm^2 je napolnjena z vodo. V njenem dnu je odprtinica s presekom $S = 1$ cm^2. V kolikšnem času (t_1) se gladina zniža na $h_1 = 20$ cm?

V trenutku t je gladina vode na višini x, voda izteka s hitrostjo v_0, gladina vode pa se spušča s hitrostjo v. Velja:



$v^2 = v_0^2 - 2gx$ ter
$vS = v_0S_0$

Iz obeh enačb izločimo v_0 in izračunamo: $v^2 = 2gx/(S^2/S_0^2 - 1)$.

$v = -\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ (negativen predznak zato, ker se x znižuje)
$\mathrm{d}x = -v\mathrm{d}t$
$x^{-1/2}\mathrm{d}x = -[2g/(S^2/S_0^2 - 1)]^{1/2}\mathrm{d}t$

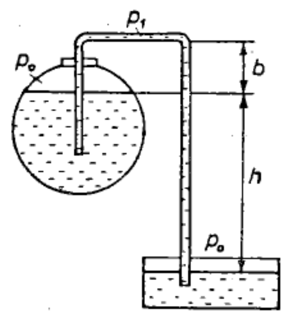
Po integraciji, upoštevajoč začetni pogoj: $x = h$ za $t = 0$, dobimo:

$x^{1/2} = h^{1/2} - (t/2)[2g/(S^2/S_0^2 - 1)]^{1/2}$
$t_1 = 2(h^{1/2} - h_1^{1/2})[(S^2/S_0^2 - 1)/2g]^{1/2}$

Ker je v našem primeru $S \gg S_0$, lahko zgornji rezultat poenostavimo:

$t_1 = (S/S_0)(h^{1/2} - h_1^{1/2})(2/g)^{1/2} = 106$ s

18.13. Bencin iz cisterne se pretaka po cevi s polmerom $R = 3$ cm v rezervoar, katerega gladina je za $h = 6$ m nižje od gladine v cisterni. Najvišje mesto cevi (natege) je za $b = 1$ m nad gladino v cisterni. Kolikšen je volumenski pretok Φ_v pretakanja? Kolik je tlak (p_1) v najvišji točki natege? Zunanji zračni tlak je $p_0 = 10$ N/cm^2, gostota bencina je $\varrho = 0{,}7$ g/cm^3.



Bencin priteka v rezervoar s hitrostjo $v = (2gh)^{1/2} = 11$ m/s. Ker je pretok stacionaren, je ta hitrost praktično enaka v vsakem delu cevi in velja:
$\Phi_v = v\pi R^2 = 31$ litrov/s.
Tlak p_1 v zgornjem delu cevi, kjer bencin teče s hitrostjo v, se primerja s tlakom p_0 ob ustju cevi, kjer bencin izteka s hitrostjo v, po Bernoullijevi enačbi: $p_1 + \varrho v^2/2 + \varrho g(b + h) = p_0 + \varrho v^2/2$ ali

$p_1 = p_0 - \varrho g(h + b) = 0{,}31$ bar

Pri $b + h > 10{,}2$ m bi bil $p_1 < 0$ in natega ne bi »vlekla«.

18.14. Voda teče s stalno hitrostjo $v_1 = 6$ m/s po cevi s polmerom $R_1 = 10$ cm. Cev se razcepi v dve cevi. Prva ima polmer $R_2 = 6$ cm, voda v njej teče s hitrostjo $v_2 = 8$ m/s. Kolikšen je polmer (R_3) druge cevi, če je hitrost vode v njej $v_3 = 10$ m/s?

$S_1v_1 = S_2v_2 + S_3v_3$ ali $R_1^2v_1 = R_2^2v_2 + R_3^2v_3$
$R_3 = (R_1^2v_1/v_3 - R_2^2v_2/v_3)^{1/2} = 5{,}6$ cm

18.15. Nestisljiva tekočina se pretaka stacionarno s hitrostjo $v = 2$ m/s po cevi s polmerom $R = 5$ cm. Cev se razdeli v tri manjše cevi. Skozi vsako od njih teče tretjina prvotnega pretoka. Kolikšni so polmeri (R_1, R_2, R_3) teh cevi, če se tekočina v njih pretaka s hitrostmi $v_1 = 8$ m/s, $v_2 = 10$ m/s in $v_3 = 12$ m/s?

$\Phi = v\pi R^2 = 0{,}016\ \mathrm{m^3/s} = 3\Phi_1$
$\Phi_1 = v_1\pi R_1^2 = v_2\pi R_2^2 = v_3\pi R_3^2$
$R_1 = R(v/3v_1)^{1/2} = 1{,}4\ \mathrm{cm}$
$R_2 = R(v/3v_2)^{1/2} = 1{,}3\ \mathrm{cm}$
$R_3 = R(v/3v_3)^{1/2} = 1{,}2\ \mathrm{cm}$

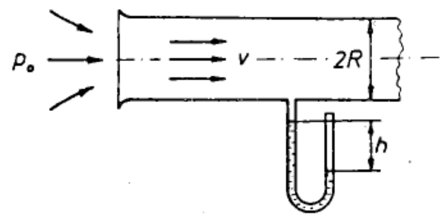
18.16. Voda teče po cevi s polmerom $R = 4$ cm s hitrostjo $v_0 = 1$ m/s. Zaradi kotlovca se debelina cevi enakomerno povečuje s časom; v času $t_1 = 30$ dni se poveča za $h = 1$ mm. Kako se hitrost vode spreminja s časom, če je pretok vode stalen? Kolikšna je hitrost (v_2) po času $t_2 = 8$ mesecev?

$\Phi_v = v_0\pi R^2 = v\pi(R - ht/t_1)^2$ ali
$v = v_0(1 - ht/t_1R)^{-2}$
$v_2 = v_0(1 - ht_2/t_1R)^{-2} = 1{,}56\ \mathrm{m/s}$

18.17. Ventilator sesa zrak skozi cev s polmerom $R = 25$ cm. Kolik je masni pretok (Φ_m) zračnega toka, če priključeni vodni manometer pokaže višinsko razliko $h = 12$ cm? Zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar, gostota zraka je $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$, gostota vode je $\varrho_0 = 1\ \mathrm{g/cm^3}$.

$\Phi_m = \varrho\Phi_v = \varrho v\pi R^2$

Hitrost v pretakanja določimo z Bernoullijevo enačbo za vodoravno pretakanje. p_0 je tlak mirujočega zraka daleč proč od cevi:



$p_0 = p + \varrho v^2/2 =$
$= (p_0 - \varrho_0 gh) + \varrho v^2/2$
$v = (2\varrho_0 gh/\varrho)^{1/2} = 44\ \mathrm{m/s}$
$\Phi_m = 10{,}4\ \mathrm{kg/s}$

18.18. Kolik je pretok (Φ_v) zraka skozi Venturijevo cev, če priključeni vodni manometer kaže višinsko razliko $h = 10$ cm? Premer širšega dela cevi je $2R_1 = 1$ cm, premer ožjega dela pa $2R_2 = 0{,}5$ cm. Gostota zraka je $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$, gostota vode je $\varrho_v = 1\ \mathrm{g/cm^3}$.

$\Phi_v = v_1\pi R_1^2 = v_2\pi R_2^2$
$p_1 + \varrho v_1^2/2 = p_2 + \varrho v_2^2/2$
$\Delta p = p_1 - p_2 = (\varrho/2)(v_2^2 - v_1^2) = (R_1^4/R_2^4 - 1)v_1^2\varrho/2 = \varrho_v gh$
$v_1 = [2\varrho_v gh/\varrho(R_1^4/R_2^4 - 1)]^{1/2} = 10{,}4\ \mathrm{m/s}$
$\Phi_v = 0{,}82\ \mathrm{dm^3/s} = 3{,}0\ \mathrm{m^3/h}$

18.19. Določi volumenski pretok (Φ_v) viskozne tekočine v vodoravni valjasti cevi s polmerom $R = 2$ cm, če je gibanje tekočine laminarno in stacionarno ter če je hitrost na razdalji $r = 1$ cm od osi enaka $v_1 = 0{,}3$ m/s.
(Glej Visokošolska fizika, str. 168).

$\Phi_v = \pi R^4\Delta p/(8\eta L)$.

Δp je tlačna razlika na razdalji L v smeri toka. Gradient tlaka ($\Delta p/L$), ki poganja tekočino po cevi, določimo iz profila hitrosti v prečnem prerezu cevi: $v(r) = (\Delta p/L)(R^2 - r^2)/(4\eta)$. Za $r = r_1$ je $v = v_1$:

$\Delta p/L = 4\eta v_1/(R^2 - r_1^2)$
$\Phi_v = (\pi R^4/8\eta)4\eta v_1/(R^2 - r_1^2)$
$\Phi_v = \pi R^4 v_1/[2(R^2 - r_1^2)] = 0{,}25\ \mathrm{dm^3}$

18.20. Velik rezervoar ima dno z debelino $b = 20$ cm. V njem izvrtamo luknjico s polmerom $R = 1$ mm. Koliko vode (volumen V) steče skozi njo v času $t = 1$ min, če je gladina vode v rezervoarju na višini h = 5 m? Viskoznost vode je $\eta = 0{,}001$ kg/ms.

Vodo potiska skozi luknjico stalna tlačna razlika $\Delta p = \varrho gh$.

$\Phi_v = \pi R^4\Delta p/(8\eta b) = \pi R^4\varrho gh/(8\eta b) = V/t$
$V = \pi R^4\varrho ght/(8\eta b) = 5{,}8\ \mathrm{dm^3}$

18.21. Kolikšna moč (P) je potrebna za pretakanje vode s tlačno razliko $\Delta p = 3$ bar po vodoravni valjasti cevi z dolžino $L = 1$ km in notranjim polmerom $R = 2{,}5$ cm? Viskoznost vode je $\eta = 0{,}001$ kg/ms.

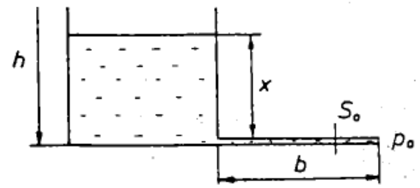
$\Phi_v = V/t = \pi R^4\Delta p/(8\eta L) = 46\ \mathrm{dm^3/s}$
$P = A/t = \Delta pV/t = \Delta p\Phi_v = 14\ \mathrm{kW}$

18.22. Posoda z višino $h = 20$ cm in presekom $S = 20\ \mathrm{cm^2}$ je polna vode. Z dna posode vodi tanka vodoravna cevka z dolžino $b = 10$ cm in presekom $S_0 = 5\ \mathrm{mm^2}$, skozi katero voda izteka. V kolikšnem času (t_1) se posoda izprazni do polovice? Viskoznost vode je $\eta = 10^{-3}\ \mathrm{Ns/m^2}$.

V trenutku t je gladina vode na višini x. Ker se znižuje počasi, vlada na obeh koncih cevke tlačna razlika $\Delta p = p - p_0 = \varrho gx$, in dobimo:

$\Phi_v = \pi R^4\Delta p/(8\eta b) =$
$= S_0^2\Delta p/(8\pi\eta b) =$
$= S_0^2\varrho gx/(8\pi\eta b)$

Zaradi pretoka Φ_v se višina gladine (x) zmanjšuje s časom; v dt se zmanjša za dx:

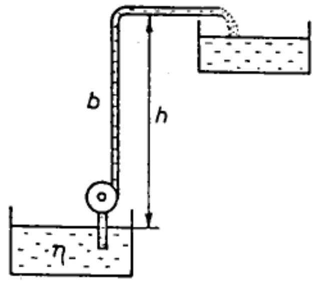


$\Phi_v = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -S\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ ali
$\mathrm{d}x/x = -(S_0^2\varrho g/8\pi\eta bS)\mathrm{d}t$
$\ln x = konst. - (S_0^2\varrho g/8\pi\eta bS)t$

Začetni pogoj zahteva $x = h$ za $t = 0$ in je zato $konst. = \ln h$. Po antilogaritmiranju dobimo:

$x = h\exp[-(S_0^2\varrho g/8\pi\eta bS)t]$
$x = h/2$ za $t = t_1 = 8\pi\ln 2\eta bS/(S_0^2\varrho g) = 14\ \mathrm{s}$

18.23. Po navpični cevi z dolžino $b = 25$ m in notranjim polmerom $R = 0{,}5$ cm črpamo olje v rezervoar, ki je za $h = 20$ m više. Najmanj kolikšna moč (P) je potrebna za pretok $\Phi_v = 25$ dm^3/min? Viskoznost olja je $\eta = 1$ kg/ms, gostota je $\varrho = 0{,}91$ g/cm^3.

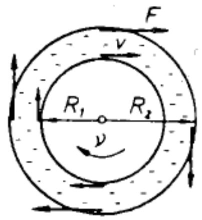


Moč P črpalke je sestavljena iz moči P_1 za dviganje olja in iz moči P_2 za potiskanje skozi cev: $P = P_1 + P_2$.

$P_1 = A/t = mgh/t = \Phi_m gh = \varrho gh\Phi_v = 74$ W
$P_2 = \Delta p\Phi_v$, kjer je Δp tlačna razlika, potrebna za potiskanje volumenskega pretoka Φ_v viskoznega olja po cevi:

$\Delta p = 8\eta b\Phi_v/(\pi R^4)$
$P_2 = 8\eta b\Phi_v^2/(\pi R^4) = 17{,}7$ kW
$P = P_1 + P_2 = 0{,}1$ kW $+ 17{,}7$ kW $= 17{,}8$ kW

18.24. Prostor med koaksialnima valjema je napolnjen z oljem (viskoznost $\eta = 10$ Ns/m^2). Kolik navor (M) učinkuje na zunanji mirujoči valj, če se notranji valj vrti s frekvenco $\nu = 3$/s? Polmer notranjega valja je $R_1 = 8{,}0$ cm, zunanjega $R_2 = 8{,}2$ cm, dolžina valjev pa je $h = 20$ cm.



Obod notranjega valja in plast olja tik ob njem se vrtita s hitrostjo (obodno) $v = R_1\omega = 2\pi R_1\nu$. Vrteča se plast olja vleče zunanji mirujoči valj s tangentno silo $F = \eta 2\pi R_2 hv/(R_2 - R_1) = 4\pi^2\nu\eta R_1R_2h/(R_2 - R_1)$. Navor te sile je:

$M = FR_2 = 4\pi^2\nu\eta R_1R_2^2h/(R_2 - R_1) = 64$ Nm

18.25. Vztrajnik z vztrajnostnim momentom $J = 10$ kgm^2 je nasajen na gred s polmerom $R_0 = 3$ cm. Ta leži v dveh drsnih ležajih z dolžino $b = 6$ cm in notranjim polmerom $R_1 = 3{,}1$ cm, v katerih je olje z viskoznostjo $\eta = 10$ kg/ms. Koliko moči (P) se troši v ležajih, če se vztrajnik vrti s kotno hitrostjo $\omega_0 = 50$/s? V kolikšnem času (t_1) od trenutka, ko prenehamo poganjati, se frekvenca vrtenja zmanjša na polovico? (Glej prejšnjo nalogo)

Viskozno olje v obeh ležajih zavira vrtenje gredi z navorom $M = 4\pi R_0R_1^2b\eta\omega/(R_1 - R_0) = K\omega$, kjer je $K = 4\pi\eta R_0R_1^2b/(R_1 - R_0) = 0{,}22$ Nms. Če naj se vztrajnik vrti s stalno kotno hitrostjo ω_0, moramo premagovati navor $M_0 = K\omega_0$, za kar je potrebna moč $P = M_0\omega_0 = 0{,}54$ kW. Ko prenehamo poganjati, se vztrajnik vrti pojemajoče s kotnim pojemkom $\alpha = M/J = K\omega/J = -\,d\omega/dt$ ali

$d\omega/\omega = -\,(K/J)dt$

Upoštevajoč začetni pogoj $\omega = \omega_0$ za $t = 0$, dobimo po integraciji:

$t = (J/K)\ln(\omega_0/\omega)$ oziroma
$t_1 = (J/K)\ln 2 = 32$ s

18.26. Valj s polmerom $R_2 = 4{,}8$ cm spustimo v dolgo pokončno cev z notranjim polmerom $R_1 = 5{,}0$ cm, v kateri je olje. Čez nekaj časa pada valj v cevi enakomerno s hitrostjo $v = 5$ cm/s. Kolikšna je viskoznost olja? Gostota olja je $\varrho_0 = 0{,}8$ g/cm^3, valja pa $\varrho = 5{,}8$ g/cm^3.
Teži valja ($\pi R_2^2h\varrho g$, h = višina valja) nasprotujeta vzgon ($\pi R_2^2h\varrho_0 g$) in viskozna sila $2\pi R_2h\eta v/(R_1 - R_2)$. Med enakomernim padanjem je rezultanta teh sil nič:

$\pi R_2^2hg(\varrho - \varrho_0) = 2\pi\eta R_2hv/(R_1 - R_2)$ ali
$\eta = R_2g(\varrho - \varrho_0)(R_1 - R_2)/2v = 47$ Ns/m^2

18.27. V viskozno tekočino z gostoto ϱ spustimo kroglico s polmerom R in gostoto ϱ_1. Kako se hitrost (v) padanja kroglice spreminja s časom, če velja linearni zakon upora in če je začetna hitrost nič?

Teža – vzgon – viskozni upor = masa x *pospešek*
$(4\pi R^3/3)(\varrho_1 - \varrho)g - 6\pi R\eta v = (4\pi R^3/3)\varrho_1 dv/dt$
$\varrho_1 dv/dt = (\varrho_1 - \varrho)g - (9\eta/2R^2)v$
$\varrho_1[(\varrho_1 - \varrho)g - (9\eta/2R^2)v]^{-1}dv = dt$

Začetni pogoj: $v = 0$ za $t = 0$. Dobimo:

$t = -(2R^2\varrho_1/9\eta)\ln\,[1 - 9\eta v/2R^2(\varrho_1 - \varrho)g]$ ali
$v = (2R^2g/9\eta)(\varrho_1 - \varrho)[1 - \exp(-9\eta t/2R^2\varrho_1)]$

Takoj v začetku padanja, za $t \ll 2R^2\varrho_1/9\eta$, je padanje še enakomerno pospešeno (upor še ne učinkuje): $\exp(-9\eta t/2R^2\varrho_1) \approx 1 - 9\eta t/2R^2\varrho_1$ in $v \approx (2R^2g/9\eta)(\varrho_1 - \varrho)9\eta t/2R^2\varrho_1 = tg(\varrho_1 - \varrho)/\varrho_1 = at$, kjer je $a = g(1 - \varrho/\varrho_1)$. Nato se pospešek padanja zmanjšuje k nič. Po dolgem času (za $t \gg 2R^2\varrho_1/9\eta$) je padanje enakomerno s stalno hitrostjo $v_0 = (2R^2g/9\eta)(\varrho_1 - \varrho)$.

18.28. Riba plava proti rečnemu toku, ki teče s stalno hitrostjo $v_0 = 1{,}4$ m/s. Prečni presek ribe je $S = 25$ cm^2, koeficient upora je $c_u = 0{,}04$. Najmanj kolikšno moč (P) troši riba, če se glede na obalo giblje s hitrostjo $v = 1$ m/s proti rečnemu toku?

Riba se glede na rečni tok giblje z relativno hitrostjo $v_0 + v$, torej mora premagovati silo $F_u = c_uS\varrho(v + v_0)^2/2$ (glej Visokošolska fizika, I. del, str. 174).

$P = F(v + v_0) = c_uS\varrho(v + v_0)^3/2 = 0{,}7$ W

18.29. Betonski blok z maso $m = 1$ t drsi po morskem dnu, ki je nagnjeno za kot $\varphi = 45°$, drsni torni koeficient je $k_t = 0{,}4$. S kolikšno hitrostjo (v_0) drsi po dolgem času enakomerno, če je upor vode premo sorazmeren s hitrostjo: $F_u = -\,cv$, kjer je $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Ns/m? Vzgon zanemarimo.

$mg(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) - cv = m\,dv/dt$ ali
$dv/(a_0 - vc/m) = dt$, $a_0 = g(\sin\varphi - k_t\cos\varphi) = 4{,}2$ m/s^2

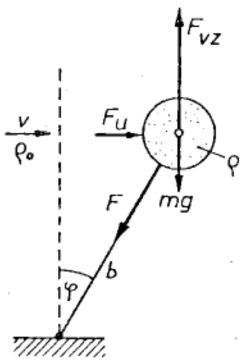
Začetni pogoj je: $v = 0$ za $t = 0$. Dobimo:

$t = -(m/c)\ln(1 - vc/ma_0)$ ali
$v = (ma_0/c)[1 - \exp(-ct/m)]$

Končna hitrost je $v_0 = ma_0/c = 1$ m/s.
Kaj se spremeni, če upoštevamo še vzgon?

18.30. Balon s polmerom $R = 1$ m je napolnjen s plinom (gostota $\varrho = 0{,}15$ kg/m^3) in privezan na vrvico, katere drugi konec je pritrjen na tla. Kolikšen kot (φ) oklepa vrvica z navpičnico, če piha veter v vodoravni smeri s hitrostjo $v = 36$ km/h? Koeficient upora je $c_u = 0{,}4$, gostota zraka je $\varrho_0 = 1{,}2$ kg/m^3.

Na balon učinkujejo sile: teža $(4\pi R^3/3)\varrho g$, upor vetra $F_u = c_u\pi R^2\varrho_0 v^2/2$, vzgon $F_{vz} = (4\pi R^3/3)\varrho_0 g$ ter sila vrvice (F). V ravnovesju, pri kotu φ, je njihova rezultanta nič. Sledi:



$F_u = F\sin\varphi$
$F\cos\varphi = F_{vz} - mg$ ali
$\operatorname{tg}\varphi = F_u/(F_{vz} - mg) = 3c_u\varrho_0 v^2/[8gR(\varrho_0 - \varrho)]$
, $\varphi = 60°$

18.31. Avtomobil na vodoravni cesti lahko pri moči $P_1 = 60$ kW motorja vozi s stalno hitrostjo $v_1 = 108$ km/h. Zaradi napake v motorju se moč zmanjša na $P_2 = 30$ kW, nova hitrost je $v_2 = 72$ km/h. Kolikšna je zaviralna sila (F_1) tal, ki je neodvisna od hitrosti? Upor zraka je premo sorazmeren s kvadratom hitrosti: $F_u = bv^2$. Kolikšen je parameter (b) upora?

$P_1 = (F_1 + bv_1^2)v_1$
$P_2 = (F_1 + bv_2^2)v_2$

Iz zgornjih enačb izračunamo:

$F_1 = (P_1v_2^2/v_1 - P_2v_1^2/v_2)/(v_2^2 - v_1^2) = 1{,}1$ kN
$b = (P_1/v_1 - P_2/v_2)/(v_1^2 - v_2^2) = 1{,}0$ Ns^2/m^2

18.32. Okrogel kamen s polmerom $R = 1$ cm in gostoto $\varrho = 2{,}7$ g/cm^3 pada v tekočini z gostoto $\varrho_0 = 1$ g/cm^3. S kolikšno stalno hitrostjo (v) pada? Koeficient upora za kroglo je $c_u = 0{,}4$. Viskoznost tekočine je $\eta = 10^{-3}$ Ns/m^2. Izračunaj Reynoldsovo število (Re).

Najprej predpostavimo, da velja linearni zakon upora: $F_u = 6\pi R\eta v$.

$mg = F_u + F_{vz}$ ali $(4\pi R^3/3)(\varrho - \varrho_0)g = 6\pi R\eta v$
$v = 2R^2g(\varrho - \varrho_0)/9\eta = 370$ m/s

Dobljeni rezultat je nesmiseln, saj kamen ne more padati hitreje od hitrosti zvoka. Torej velja kvadratni zakon upora: $F_u = c_u\pi R^2\varrho_0 v^2/2$.

$(4\pi R^3/3)(\varrho - \varrho_0)g = c_u\pi R^2\varrho_0 v^2/2$
$v^2 = 8Rg(\varrho - \varrho_0)/(3c_u\varrho_0)$, $v = 1{,}1$ m/s

Da zares lahko uporabimo kvadratni zakon upora, se prepričamo s pomočjo Reynoldsovega števila: $Re = 2Rv\varrho_0/\eta = 2{,}2 \cdot 10^4$ (glej Visokošolska fizika, I. del, str. 176).

18.33. Leseno kroglo z maso $m = 1$ kg porinemo po vodi tako, da se začne gibati z začetno hitrostjo $v_0 = 5$ m/s v vodoravni smeri. Kako se hitrost krogle spreminja s časom, če je upor premo sorazmeren s hitrostjo? Pri začetni hitrosti v_0 je upor enak $F_0 = 0{,}5$ N. V kolikšnem času (t_1) se hitrost zmanjša na polovico začetne vrednosti? Kolikšno pot (x_1) napravi v tem času? Na kolikšni oddaljenosti (x_0) se krogla umiri?

$m\,dv/dt = -kv$, $k = F_0/v_0 = 0{,}1$ Ns/m
$dv/v = -(k/m)dt$ ter po integraciji:
$\ln(v/v_0) = -kt/m$ ali
$v = v_0\exp(-kt/m)$

Pri $t = t_1$ je $v = v_0/2$:
$t_1 = (m/k)\ln 2 = 6{,}9$ s

$dx = v\,dt = v_0\exp(-kt/m)dt$

Zopet integriramo:

$x = (mv_0/k)[1 - \exp(-kt/m)]$
$x_1 = (mv_0/k)[1 - \exp(-kt_1/m) = 25$ m

Krogla se umiri na razdalji $x_0 = x(t \to \infty) = mv_0/k = mv_0^2/F_0 = 50$ m.

18.34. Padalec z maso m je privezan na padalo s prečnim presekom S. Spusti se brez začetne hitrosti. Kako se njegova hitrost spreminja s časom, če velja kvadratni zakon upora zraka? Kolikšna je končna hitrost (v_0) enakomernega padanja?

$mg - c_uS\varrho v^2/2 = ma = m\,dv/dt$ ali
$(1 - c_uS\varrho v^2/2mg)^{-1}\,dv = g\,dt$

Vstavimo $\alpha^2 = 2mg/(c_u\varrho S)$ in dobimo enostavnejšo enačbo:

$(1 - v^2/\alpha^2)^{-1}dv = g\,dt$

Po integraciji, upoštevaje začetni pogoj: $v = 0$ za $t = 0$, dobimo:

$t = (\alpha/2g)\ln[(\alpha + v)/(\alpha - v)]$ ali
$v = \alpha[\exp(2gt/\alpha) - 1]/[\exp(2gt/\alpha) + 1] = \alpha\,\mathrm{th}(gt/\alpha)$

Takoj po odskoku, za $t \ll \alpha/g$, je $\mathrm{th}(gt/\alpha) \approx gt/\alpha$ in $v \approx gt$, kar pomeni, da padalec prosto pada (upor zraka zaradi majhne hitrosti še ne učinkuje zaznavno). Nato se pospešek padanja zmanjšuje k nič. Po dolgem času ($t \gg \alpha/g$) je $v \approx v_0 = \alpha = (2mg/c_u\varrho S)^{1/2}$.