

Vaja 3 in 4

Ime in priimek: Datum:.....

Osnove satelitske navigacije

Satelitska navigacija je predvsem po zaslugi sistema GPS postala nepogrešljiv del našega vsakdanjika, da se niti ne zavedamo, kakšen kompleksen sistem je v ozadju. Pri tej vaji bomo poskušali osvetliti najosnovnejše principe delovanja sistema GPS in GNSS na splošno.

1. Trilateracija

Satelitska navigacija temelji na določitvi trenutnega položaja s pomočjo meritve časa, ki preteče od takrat, ko je satelit signal oddal, pa vse do takrat, ko je sprejemnik ta signal sprejel (komunikacija poteka samo v smeri od satelita do sprejemnika). Ker so signali elektromagnetni, potujejo s svetlobno hitrostjo $c=299\,792\,458$ m/s. Zaradi motenj v zemeljski atmosferi ta številka sicer nekoliko odstopa, a to trenutno ni pomembno za razumevanje delovanja GNSS. Torej lahko iz izmerjenega časa določimo razdaljo sprejemnika do satelita. Seveda je ta čas uporaben samo v primeru, da poznamo lego satelita, ko je signal oddal. Določitvi položaja sprejemnika na podlagi izmerjenih časov več satelitov (vsaj 4 morajo biti) pravimo trilateracija.

Trilateracija v dveh dimenzijah

Da bi lažje razumeli matematiko v ozadju trilateracije se za začetek omejimo samo na dva oddajnika v dveh dimenzijah. Njuno lego poznamo. Njuna oddaljenost naj bo L . Koordinatni sistem postavimo tako, da odseva simetrijo našega problema. Os x naj poteka med oddajnikoma, izhodišče pa ravno na sredini med njima. Torej bo lega enega oddajnika $(-L/2,0)$, drugega pa $(L/2,0)$. Razdalja od sprejemnika do prvega naj bo a (tega podatka ne poznamo) do drugega pa b (prav tako). Poznamo samo razliko med obema $s=a-b$. Lego sprejemnika opišemo z vektorjem $\mathbf{r}$. Relativna lega sprejemnika glede na prvi oddajnik določa vektor $\mathbf{a}$, glede na drugi pa $\mathbf{b}$.

Med njimi veljata torej sledeči relaciji:

$$\mathbf{a}=\mathbf{r}+(L/2,0)$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{r}-(L/2,0)$$

Odtod vidimo, da sta vsota in razlika $\mathbf{a}+\mathbf{b}=2\mathbf{r}$ in $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(L,0)$. Skalarni produkt obeh nam da po eni strani $a^2-b^2=(a+b)s$, po drugi pa $2xL$, kjer je x komponenta vektorja $\mathbf{r}$ po osi x . Če izenačimo oba izraza, dobimo

$$a+b=2xL/s.$$

Razdaljo a lahko zapišemo tudi drugače.

$$a=((a+b)+(a-b))/2=xL/s+s/2$$

INTELIGENTNI TRANSPORTNI SISTEMI – PRIROČNIK ZA VAJE

(pripravil: Matej Bažec)

*Kvadrat zgornjega izraza mora biti enak skalarnemu produktu vektorja **a** s samim seboj. S primerjavo obeh vrednosti dobimo sledečo enačbo za krivuljo, ki vsebuje vse možne točke, katerih razlika razdalj med obema sprejemnikoma je enaka s.*

$$x^2(L^2/s^2-1)-y^2=(L^2-s^2)/4$$

Katere vrednosti s so smiselne pri danem L?

Katero krivuljo opisuje zgornja enačba?

Pri vrednosti $s=0$, je zgornji razmislek neveljaven, ker ne moremo deliti z nič. Razmisli, na kateri krivulji leži sprejemnik v tem primeru.

Kot primer rešitve triangulacije v 2D bomo poskušali najti lego sprejemnika, če so oddajniki postavljeni v točkah (0,0), (2,4) in (5,0), razlika razdalja med prvima dvema pa je 0,66, med drugima dvema pa 0,19. Pomagaj si z Matlabovo skripto trilateracija.m. Kakšne so koordinate našega sprejemnika?

Trilateracija v GNSS

Naš razmislek lahko razširimo tudi v tri dimenzije. Problem je osno simetričen. Rešitev je ena od ploskev dvodelnega hiperboloida. Kot smo že v uvodu povedali, pri satelitski navigaciji merimo čas preleta od satelita do sprejemnika. Že takoj na začetku moramo povedati, da je uporaba lokalne ure za ta namen nemogoča. Razlog tiči v visoki hitrosti svetlobe. Pri natančnosti 3m bi morale biti ure sinhronizirane vsaj na 10ns natančno. Tako natančne ure se da izdelati, vendar so cenovno nedostopne in prevelike, da bi jih stlačili v uporabniške elektronske naprave. Zato jih namestimo samo v satelit, lokalno pa vključimo čas kot neznanko pri izračunu položaja.

Za določitev lege potrebujemo signale vsaj štirih satelitov. Te štiri satelite bomo indeksirali po zaporedju prispetja njihovega signala v sprejemnik z 1, 2, 3 in 4. V samem signalu so zakodirani poleg ostalih podatkov tudi položaj satelita in čas, ko je bil signal oddan (v resnici je to čas, ko bo oddan naslednji del paketa (subframe)). Tako bomo o vsakem satelitu vedeli njegovo lego $\mathbf{r}_n$ in čas t_n' , ko je bil signal oddan. Signal smo prejeli ob času t_n . Slednji seveda niso znani. Lahko pa izmerimo čas med prispetjem signala s satelita 1 in signala s satelita 2.

Čas preleta je povezan z oddaljenostjo od satelita številka n z

$$t_n' - t_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|/c,$$

kjer je $\mathbf{r}$ lega oddajnika. Ker lahko izmerimo samo razlike med časi prispetja, bomo enačbe preuredili tako, da bomo od enačbe za vsak satelit odšteli enačbo za prvi satelit.

$$(t_n' - t_n) - (t_1' - t_1) = (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)/c$$

Pomnožimo obe strani s c :

$$c(t_n' - t_1' - (t_n - t_1)) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$$

Spet smo dobili enačbo, kjer poznamo samo razliko razdalj med obema satelitoma. Rešitev je spet hiperboloid za vsako od treh enačb (kombinacija 2. in 1., 3. in 1. ter 4. in 1. satelita). Presečišče teh treh hiperboloidov nam da trenutno lego sprejemnika.

2. Sporočila v sistemu GPS

GPS je izvorno sestavljen iz 24 satelitov (vesoljskih vozil (space vehicle - SV) v žargonu GPS), ki krožijo po 6 različnih tirnicah. Tirnice so nagnjene za 55° glede na ekvator in so med seboj enakomerno porazdeljene. Na vsaki tirnici krožijo 4 sateliti, ki medsebojno niso enakomerno porazdeljeni, ampak je njihova porazdelitev taka, da maksimizira število vidnih satelitov. Taka konfiguracija omogoča, da je s katere koli točke na Zemlji vsak trenutek vidno vsaj 6 satelitov. Dejansko število satelitov je nekoliko večje (trenutno 31 delujočih). Sateliti obkrožijo Zemljo dvakrat dnevno (zaradi kroženja zemlje je njihov obodni čas 11 ur in 58 minut. To pomeni, da je višina orbit 20180km.

Na vsakem od satelitov je nameščena atomska ura, ki omogoča, da satelit oddaja svoj čas z zadostno natančnostjo. Vsaj enkrat dnevno se ura sinhronizira z uro na bazni postaji na zemlji. Prav tako se odčita točna lega zaradi morebitnih manjših odstopanj od predvidene tirnice.

Tehnične podrobnosti komunikacije

Vsi sateliti oddajajo svoj signal nepretrgoma na isti frekvenci 1575,42MHz (L1). V resnici oddajajo sateliti signale tudi na drugih frekvencah, a ti niso predvideni za civilno rabo in se jih v prometnih aplikacijah ne uporablja. To pomeni, da bomo na sprejemniku hkrati sprejemali signale z vseh

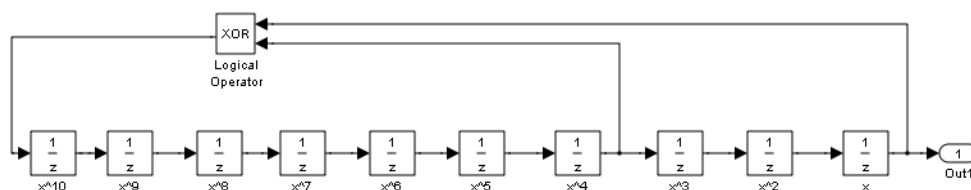
satelitov. Valovanje je krožno polarizirano, zato da lahko sprejemnik loči direkten signal od odbitega (pri odboju se sučnost polarizacije spremeni).

Nadaljnje nastane problem, kako iz vse te zmešnjave razbrati signal s pravega satelita. Za ta namen uporabljamo Goldovo kodo modulirano z binarnim faznim zamikom (BPSK - binary phase shift keying).

Goldova koda

Goldova koda je sestavljena iz dveh pomičnih registrov z linearno povratno vezavo (to je samo nekoliko ponesrečen prevod od Linear Feedback Shift Register - LFSR). Najprej si pogledjmo, kaj je LFSR.

Matematika v ozadju LFSR je aritmetika v prostoru končnih obsegov. Če je število elementov v obsegu enako potenci števila 2 (to je priročno zaradi binarnega sistema v digitalnih vezjih), potem je ta obseg določen z nerazcepnim polinomom nad prostorom števil 0 in 1 z operacijami modulo 2. LFSR uporablja primitivni polinom, da generira periodično zaporedje v tem prostoru tako, da se vsak element z izjemo ničelnega polinoma v periodi pojavi natanko enkrat.



Slika 1: Primer LFSR s primitivnim polinomom $x^{10}+x^3+1$.

V praksi pa to pomeni sledeče. LFSR je sestavljen iz 10 blokov (v splošnem jih je toliko, kolikor je stopnja primitivnega polinoma), ki hranijo vrednosti 0 ali 1. Ob vsakem ciklu se vrednost preseli v nižji blok v najvišjega pa vstavimo vrednost, ki je enaka logičnemu ekskluzivnemu ali (xor) vrednosti, ki jih predstavljajo potence v primitivnem polinomu (z izjemo najvišje potence x^{10}). Izhod registra je vrednost najnižjega bloka (slika 1). Bloki so lahko inicializirani poljubno z izjemo konfiguracije, ko so vsi 0. Pri GPS se uporablja inicializacija, ko so vsi enaki 1.

LFSR imajo sledeče lastnosti. So periodični na $2^{10}-1=1023$ znakov (vseh kombinacij je 1024, a tista z vsemi 0 se nikoli ne pojavi). Znotraj periode imajo lastnosti belega šuma - 0 in 1 sta navidezno naključno porazdeljeni.

Goldova koda uporablja dva LFSR (dveh različnih primitivnih polinomov), tako da združi njune vrednosti z ekskluzivnim ali. Vsi sateliti v GPS uporabljajo primitivna polinoma $x^{10}+x^3+1$ in $x^{10}+x^9+x^8+x^6+x^3+x^2+1$, pri čemer je zaporedje pri slednjem zamaknjeno za t . i. PRN število satelita. To lahko interpretiramo tudi, kot da je drugi LFSR inicializiran drugače od vseh 1, vendar je prejšnji pogled preglednejši.

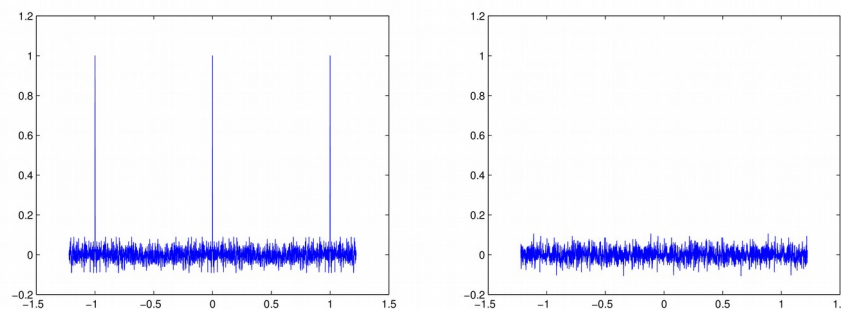
Tako je zaporedje znakov za vsak satelit določeno zgolj z njegovo PRN številko. Sateliti generirajo znake s frekvenco 1,023MHz, tako da je trajanje ene periode natanko 1ms. Ko pride signal vseh vidnih satelitov do sprejemnika, se seveda ti signali pomešajo: zamaknejo se v odvisnosti od prepotovane poti, zgubijo na jakosti, celo frekvenca se jim spremeni, a več o tem kasneje. Ob vsem tem je prisoten še šum, ki je tipično večji od signala samega.

Korelacije v Goldovi kodi

Podobno kot LFSR, je tudi Goldovo zaporedje navidezno naključno. Korelirano je samo s samim seboj. Korelacijo določimo z integralom produkta dobljenega signala $s(t)$ z lokalno generiranim Goldovim zaporedjem $g(t)$ z danim časovnim zamikom.

$$\text{corr} = \int s(t)g(t+\Delta t)dt$$

Integracija poteka po eni periodi. Korelacijo lahko razumemo kot neke sorte faktor podobnosti (če odmislimo amplitudo signala). Dva identična signala imata korelacijo 1, popolnoma nepovezana signala pa 0.



Slika 2: Primer korelacije Goldove kode same s seboj (PRN=1) in korelacije med dvema različnima Goldovima kodama (PRN=1 in 2).

Kot vidimo na sliki 2, sta dve različni Goldovi kodi popolnoma nekorelirani. Tudi s samo seboj je Goldova koda nekorelirana. Izjema je, ko je časovni zamik enak večkratniku periode. To nam omogoča, da iz mešanice različnih signalov iz več satelitov in šuma izločimo samo tisti signal, ki ga opazujemo. Ostrina vrhov v korelaciji nam omogoča, da se sinhroniziramo s signalom satelita na 1% časa trajanja enega znaka v Goldovem zaporedju.

Korelacijo lahko poskusaš izračunati tudi sam s pomočjo priloženih Matlabovih skript `gold_code.m`, `correlation.m` in `plot_corr.m`. Prva generira eno periodo Goldovega zaporedja s specifičnim PRN. Druga izračuna korelacijski koeficient med dvema zaporedjema z danim zamikom v enoti trajanja znaka. Tretja nariše korelacijski koeficient v odvisnosti od zamika.

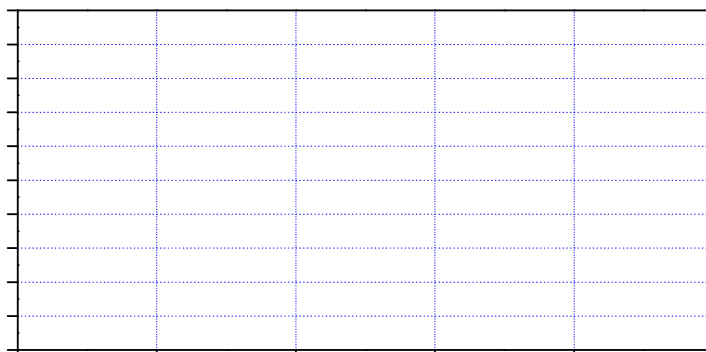
Kolikšen je korelacijski koeficient med zaporedji s PRN 5 in 7, če je zamik med njima 350 znakov?

INTELIGENTNI TRANSPORTNI SISTEMI - PRIROČNIK ZA VAJE

(pripravil: Matej Bažec)

Kolikšna je maksimalna vrednost korelacije med zaporedji s PRN 18 in 23 ter pri katerem zamiku se pojavi? A lahko sklepamo, da sta takrat zaporedji korelirani?

Nariši korelacijo Goldovega zaporedja s PRN 18 v okolici zamika 0 (dva znaka v vsako smer).



Stabilnost signala na šum

S pomočjo Simulinkovega modela gold.mdl bomo analizirali vpliv šuma na sprejem GPS signala. Najprej si oglej bloka, ki generirata Goldovo zaporedje in nato še bloka, ki generirata LFSR. Postopoma povečuj stopnjo šuma za faktor 10 in oceni, pri kateri vrednosti šuma ne ločimo več med poravnanim in zamaknjenim signalom.

Opiši, na kakšen način vpliva nivo šuma na natančnost določanja položaja.

3. Sporočila v sistemu GPS

Sedaj vemo, da GPS satelit oddaja Goldove znake s frekvenco 1023MHz. To pomeni, da se bo enkrat na 1ms sekvenca ponovila. Tak signal seveda v sebi ne nosi nobenih sporočil. Sporočila pa so zakodirana na sledeči način. Vsakih 20ms (kar ustreza 20 periodam) pošlje satelit 1 bit. To naredi na sledeči način. Če pošlje 0, potem pošlje kar originalno Goldovo zaporedje 20-krat. Če pa pošlje 1, potem pošlje isto zaporedje pomnoženo z -1. Sprejemnik bo slednje zaznal z negativno korelacijo (-1 namesto 1 v vrhu), sicer pa bo vse ostalo isto. Sporočila torej potujejo s hitrostjo 50 bitov na sekundo.

Sporočila so zložena v pakete (frame) po 1500 bitov, torej traja vsak paket 30s. Vsak paket je razdeljen na 5 podpaketov (subframe) po 300 bitov vsak, ki traja 6s. Čisto vsak podpaket vsebuje telemetrične podatke, ki omogočajo sinhronizacijo začetka paketa v sprejemniku in čas v tednu v resoluciji 6s, ko bo poslan naslednji podpaket. Preostanek podpaketa pa je specifičen.

Prvi podpaket vsebuje podatke kot so datum, podatke o korekciji časa in podatke o statusu satelita. Drugi in tretji podpaket vsebujeta podatke o efemeridah. To so podatki, ki omogočajo z veliko natančnostjo določiti lego satelita. Četrty in peti podpaket nosita informacije o almanahu. To so podatki o grobi legi vseh satelitov, parametri za korekcijo zaradi ionosferskih efektov in podobne stvari. Pravzaprav nosita le del (1/25) almanaha. Da poberemo celoten almanah, potrebujemo 25 paketov, kar ustreza 12,5 minutam. Almanaha ne potrebujemo vedno znova, ko pošljemo sprejemnik, saj je njegova veljavnost 180 dni. Zato je ob prvem zagonu čas določitve položaja tako dolg (cold fix). Po drugi strani pa vedno potrebujemo podatke efemerid za posamezen satelit. Zato je minimalen čas, ko določimo lego 6s.

4. Popravki

Do sedaj smo privzeli, da je prepotovana pot enaka razliki obeh časov pomnoženi s hitrostjo svetlobe v vakuumu. Tak pogled nam da dober približek našega položaja, za natančnejše določanje pa moramo upoštevati nekatere popravke.

V prvo skupino sodijo atmosferski podatki. Elektromagnetno valovanje namreč potuje skozi snov vedno nekoliko počasneje kot v vakuumu. Čeprav se hitrost v zraku ne razlikuje bistveno, je treba pri natančnejšem določanju upoštevati tudi ta efekt. Delno lahko GPS sprejemnik popravi s podatki iz almanaha, kjer so parametri modela, ki skuša opisati potovanje signala skozi atmosfero.

V drugo skupino pa sodijo relativistični popravki. Upoštevati je treba namreč, da čas v satelitu zaradi njegovega relativnega premikanja glede

na opazovalca na zemlji teče počasneje. Poleg tega je treba upoštevati tudi upočasnitev časa opazovalca na Zemlji zaradi gravitacijskega polja. Te popravke delno že upošteva satelit, tako da je frekvenca oscilatorja nekoliko nižja od 10,23MHz. Kljub temu je treba lokalno frekvenco uskladiti zaradi Dopplerjevega efekta, ki znaša do 5kHz za stoječe objekte (pri premikajočih je lahko večji).

5. Fazno določanje lege

V nekaterih aplikacijah (npr. geodetskih) je določanje lege na 3m premalo natančno. Vendar se da to natančnost izboljšati. To lahko naredimo z odpravo šuma v napravi (okoljskega tako ali drugače ne moremo). Poleg tega lahko, če poznamo koordinate bližnje točke, kalibriramo sprejemnik v tisti točki in tako odpravimo atmosferske napake. S takimi pristopi (ki pa za navigacijo niso praktični) lahko dosežemo natančnost 20cm, ki približno ustreza valovni dolžini oddajnega nosilnega signala.

Ko imamo enkrat tako natančnost lahko uporabimo fazno določanje za določanje lege na 1cm natančno ali še nekoliko manj. To dosežemo z opazovanjem faznega zamika. V tem primeru psevdorazdalje ne določa več demoduliran signal, ampak faza surovega signala.